$\boxed{1}$ ’24 福井大(医) 確率と整数に関する問題．(1) と (2) は平易，(3) は標準Lv.

解答

(1)　赤玉，白玉それぞれ n 個の計 $2n$ 個の玉をすべて区別する．n 個の玉の取り出し方は全部で ${}_{2n}\mathrm{C}_n$ 通りでありこれらは同様に確からしい．このうち，k 個の赤玉と $n-k$ 個の白玉の取り出し方は ${}_n\mathrm{C}_k \cdot {}_n\mathrm{C}_{n-k} = ({}_n\mathrm{C}_k)^2$ 通りあるから，求める確率は $\dfrac{({}_n\mathrm{C}_k)^2}{{}_{2n}\mathrm{C}_n}$．答

(2)　取り出した n 個の玉のうち，赤玉は 0 個，1 個，2 個，…，n 個のいずれかである．ゆえに，確率の総和を考えて，$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{({}_n\mathrm{C}_k)^2}{{}_{2n}\mathrm{C}_n} = 1$，すなわち $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} ({}_n\mathrm{C}_k)^2 = {}_{2n}\mathrm{C}_n$．終

(3)　${}_{2n}\mathrm{C}_n = \dfrac{(2n)!}{n! \cdot n!}$ より $n! \cdot n! \cdot {}_{2n}\mathrm{C}_n = (2n)!$．…(*)

素数 p は $n < p \leqq 2n < 2p$ を満たすので，1, 2, …, $2n$ から p を除いた $2n-1$ 個の自然数はすべて p と互いに素であり，$n!$ と p は互いに素，$(2n)!$ の素因数 p の個数は 1 個である．

ゆえに，(*) の両辺について素因数 p の個数を比較して，${}_{2n}\mathrm{C}_n$ の素因数 p の個数は 1 個となり，${}_{2n}\mathrm{C}_n$ は p で割り切れるが，p^2 では割り切れない．終

$\boxed{2}$ '24 福井大(医) 複素数の極形式と距離の最小評価．(1) と (2) は平易，(3) は標準Lv.

解答

(1)　$z=1+\sqrt{3}\,i$ より $|z|=2$ である．

$z^n=a_n+b_ni$ より $|z^n|=\sqrt{a_n{}^2+b_n{}^2}$ であり，$a_n{}^2+b_n{}^2=|z^n|^2=|z|^{2n}=2^{2n}$．答

(2)　$z=2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$ であり，ド・モアブルの定理より $z^n=2^n\left(\cos\dfrac{n\pi}{3}+i\sin\dfrac{n\pi}{3}\right)$，

すなわち $a_n=2^n\cos\dfrac{n\pi}{3}$，$b_n=2^n\sin\dfrac{n\pi}{3}$ である．…①

自然数 n に対して，$\left|\cos\dfrac{n\pi}{3}\right|$ のとりうる値は 0 または $\dfrac{1}{2}$ のいずれかで，2^n は偶数であるから，a_n は必ず整数となる．一方，$\left|\sin\dfrac{n\pi}{3}\right|$ のとりうる値は 0 または $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のいずれかであり，b_n が整数になるとき，$\sin\dfrac{n\pi}{3}=0$ である．

ゆえに，a_n, b_n がともに整数になるとき，$n=3k$ $(k=1,\ 2,\ \cdots)$．答

(3)　xy 平面上で，直線 ℓ の方程式は $\sqrt{3}\,x+y-8=0$ であり，点 $\mathrm{P}(a_n,\ b_n)$ と ℓ の距離 $d_n=\dfrac{1}{2}\left|\sqrt{3}\,a_n+b_n-8\right|$ と表せる．① を代入して整理すると $d_n=\left|2^n\sin\dfrac{(n+1)\pi}{3}-4\right|$．

ここで，$\sin\dfrac{(n+1)\pi}{3}$ のとりうる値は 0 または $\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のいずれかであり，

(i) $\sin\dfrac{(n+1)\pi}{3}=0$ のとき，$d_n=4$．

(ii) $\sin\dfrac{(n+1)\pi}{3}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき，$d_n=4+\sqrt{3}\cdot 2^{n-1}>4$．

(iii) $\sin\dfrac{(n+1)\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき，$d_n=\left|\sqrt{3}\cdot 2^{n-1}-4\right|$．

n は小さい順に $n=1,\ 6,\ 7,\ \cdots$ であり，$d_1=4-\sqrt{3}<4$,

$n\geqq 6$ のとき $d_n=\sqrt{3}\cdot 2^{n-1}-4\geqq d_6=32\sqrt{3}-4>32\cdot 1-4=28>4$．

ゆえに，d_n の最小値は $4-\sqrt{3}$．答　また，このとき $n=1$．答

3 ’24 福井大(医) 微積分総合問題．(1) やや難である．(2) と (3) は平易であった．

解答

(1)　$-a \leqq t \leqq x$ において $|t-x|=-(t-x)$，$x \leqq t \leqq a$ において $|t-x|=t-x$ より

$$f(x)=\int_{-a}^{x} -(t-x)e^{-t^2}dt+\int_{x}^{a}(t-x)e^{-t^2}dt$$

$$=\int_{-a}^{x} -te^{-t^2}dt+x\int_{-a}^{x} e^{-t^2}dt+\int_{x}^{a} te^{-t^2}dt-x\int_{x}^{a} e^{-t^2}dt\ .$$

$-a<x<a$ のとき，

$$f'(x)=-xe^{-x^2}+\int_{-a}^{x} e^{-t^2}dt+xe^{-x^2}-xe^{-x^2}-\int_{x}^{a} e^{-t^2}dt-x\cdot\left(-e^{-x^2}\right)=\int_{-a}^{x} e^{-t^2}dt-\int_{x}^{a} e^{-t^2}dt\ .$$

ゆえに，$f''(x)=e^{-x^2}-\left(-e^{-x^2}\right)=2e^{-x^2}>0$ であり，曲線 $y=f(x)$ は下に凸である．終

(2)　(1) より $f'(x)$ は増加関数，また e^{-t^2} は偶関数であり $f'(0)=\int_{-a}^{0} e^{-t^2}dt-\int_{0}^{a} e^{-t^2}dt=0$

であることから，$-a<x<0$ で $f'(x)<0$，$f'(0)=0$，$0<x<a$ で $f'(x)>0$ となり，

$f(x)$ は $x=0$ で極小かつ最小となる．ゆえに，$f(x)$ が最小となる x の値は $x=0$．答

(3)　(2) より $f(x)$ の最小値は $f(0)=\int_{-a}^{a} |t|e^{-t^2}dt$ であり，

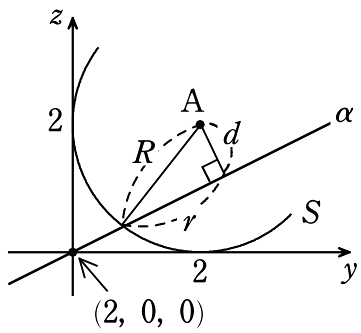
$$f(0)=\int_{-a}^{0} -te^{-t^2}dt+\int_{0}^{a} te^{-t^2}dt=\left[\frac{1}{2}e^{-t^2}\right]_{-a}^{0}-\left[-\frac{1}{2}e^{-t^2}\right]_{0}^{a}=1-e^{-a^2}\ .$$

ゆえに，$f(0)=\dfrac{1}{2}$ のとき $1-e^{-a^2}=\dfrac{1}{2}$ より $a^2=\log 2$，すなわち $a=\sqrt{\log 2}$．答

$\boxed{4}$ ’24 福井大 (医) 空間図形に関する求積問題．(1) は平易，(2) と (3) は標準Lv.

$\boxed{\text{解答}}$

球 S の中心を A$(2,\ 2,\ 2)$，半径を $R=2$ とおく．



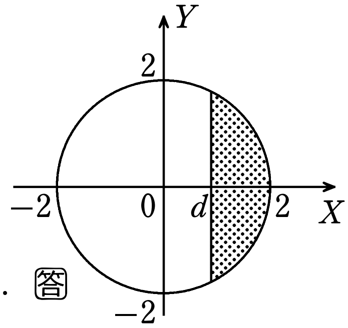
(1)　平面 α が点 P$(4,\ 4,\ 2)$ を通るとき，α の方程式は $y-2z=0$.

A と α の距離 d は，平面 $x=2$ による断面図 (右図) を考えて

$$d=\frac{|2-2\cdot 2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

ゆえに，求める交円の半径を r とすると，$r^2=R^2-d^2$ より

$$r=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{4-\frac{4}{5}}=\frac{4}{\sqrt{5}}.\ \boxed{\text{答}}$$



(2)　(1) のとき S の中心 A は α の上側にあり，$K_U>K_D$ であるから，右図の円 $X^2+Y^2=4$ の $d\leqq X\leqq 2$ の部分を X 軸のまわりに回転させてできる立体の体積が K_D であり，

$$K_D=\int_d^2 \pi Y^2 dX=\pi\int_d^2 (4-X^2)dX=\pi\left[4X-\frac{1}{3}X^3\right]_d^2=\frac{16(25-7\sqrt{5})\pi}{75}.\ \boxed{\text{答}}$$

(3)　Q$(a,\ 5,\ b)$ とおくと α の方程式は $by-5z=0$．$\dfrac{K_U}{K_D}=\dfrac{5}{27}$ より $K_U<K_D$ であり，

S の中心 A は α の下側にあり $\dfrac{b}{5}>1$ より $b>5$．…①

球 S の体積を $V=\dfrac{4}{3}\pi\cdot 2^3=\dfrac{32}{3}\pi$ とおくと $K_D=\dfrac{27}{32}V=9\pi$．A と α の距離を h とおくと，① のもとで $h=\dfrac{|2b-10|}{\sqrt{b^2+(-5)^2}}=\dfrac{2(b-5)}{\sqrt{b^2+25}}$ …② であり，(2) 同様に考えて，

$$K_D=\int_{-h}^2 \pi Y^2 dX=\pi\left[4X-\frac{1}{3}X^3\right]_{-h}^2=\frac{16}{3}\pi-\frac{-12h+h^3}{3}\pi=\frac{-h^3+12h+16}{3}\pi.$$

ゆえに，$\dfrac{-h^3+12h+16}{3}\pi=9\pi \iff (h-1)(h^2+h-11)=0$，すなわち $h=1$.

② より $\dfrac{2(b-5)}{\sqrt{b^2+25}}=1 \iff 2(b-5)=\sqrt{b^2+25}$．① のもとで両辺を 2 乗して，

$4(b-5)^2=b^2+25 \iff 3b^2-40b+75=0$，① より点 Q の z 座標は $b=\dfrac{20+5\sqrt{7}}{3}$．$\boxed{\text{答}}$