$\boxed{1}$ ’25 福井大 (工) 漸化式と数学的帰納法．(1) 易 (2) 平易 (3) 標準

解答

(1)　$a_{n+1}+2=5(a_n+2)$ と表せるので，数列 $\{a_n+2\}$ は初項 $a_1+2=5$，公比 5 の等比数列となる．

ゆえに，$a_n+2=5\cdot5^{n-1}$，すなわち $a_n=5^n-2$．答

(2)　$S_1=2b_1-6$ および $S_1=b_1$ より $2b_1-6=b_1$，すなわち $b_1=6$．

また，$S_{n+1}=2b_{n+1}+2(n+1)-8$，…①　$S_n=2b_n+n-8$ …② であり，①－②により

$$b_{n+1}=2(b_{n+1}-b_n)+2 \Leftrightarrow b_{n+1}=2b_n-2 \Leftrightarrow b_{n+1}-2=2(b_n-2).$$

(1) 同様にして，$b_n-2=(b_1-2)\cdot2^{n-1}$，すなわち $b_n=2^{n+1}+2$．答

(3)　$a_n+b_n=5^n+2^{n+1}$ が 3 の倍数である …(*) ことを数学的帰納法で示す．

（i）$n=1$ のとき，$a_1+b_1=3+6=9$ より，これは 3 の倍数である．

（ii）$n=k$ のとき，(*) 成立と仮定する．l を整数として $5^k+2^{k+1}=3l$ と表せて，$5^k=3l-2^{k+1}$ を用いると，

$$a_{k+1}+b_{k+1}=5^{k+1}+2^{k+2}=5(3l-2^{k+1})+2\cdot2^{k+1}=15l-3\cdot2^{k+1}=3(5l-2^{k+1}).$$

$5l-2^{k+1}$ が整数であることより $n=k+1$ のときも (*) 成立．

以上により，すべての自然数 n について (*) は成り立つ．終

別解　3 を法とする合同式を用いると，$5\equiv-1$，$2\equiv-1$ より，$a_n+b_n\equiv(-1)^n+2\cdot(-1)^n\equiv3\cdot(-1)^n\equiv0$．終

$\boxed{2}$ '25 福井大(工) 空間ベクトルにおける四面体の測量．(1) 易 (2) 標準 (3) 平易

解答

(1) $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=|\vec{b}-\vec{a}|^2=|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{a}|^2$ より $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=5-6+5=4$，すなわち $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=2$.

$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2=|\vec{c}-\vec{a}|^2=|\vec{c}|^2-2\vec{c}\cdot\vec{a}+|\vec{a}|^2$ より $|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2=4-8+5=1$，すなわち $|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=1$.

また，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{c}-\vec{a})=\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{c}\cdot\vec{a}+|\vec{a}|^2$ より $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=2-3-4+5=0$.

ゆえに，$\mathrm{AB}=2$, $\mathrm{AC}=1$，$\angle\mathrm{BAC}=90^\circ$．答

(2) Hは平面ABC上にあるので，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ …(∗) とおける．OH⊥(平面ABC) より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0 \iff (\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0 \iff \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}+4s=0.\ \cdots①$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0 \iff (\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0 \iff \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+t=0.\ \cdots②$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}\cdot(\vec{b}-\vec{a})=\vec{a}\cdot\vec{b}-|\vec{a}|^2=-2$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{a}\cdot(\vec{c}-\vec{a})=\vec{c}\cdot\vec{a}-|\vec{a}|^2=-1$ であるから，

①，② はそれぞれ $-2+4s=0$，$-1+t=0$ となり，$s=\dfrac{1}{2}$，$t=1$．ゆえに，(∗) に代入して

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{a}+\frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a})+(\vec{c}-\vec{a})\text{，すなわち }\overrightarrow{\mathrm{OH}}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}.$$ 答

(3) $|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|^2=\dfrac{1}{4}|\vec{a}|^2+\dfrac{1}{4}|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2-\dfrac{1}{2}\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{c}\cdot\vec{a}$ より $|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|^2=\dfrac{5}{4}+\dfrac{5}{4}+4-\dfrac{3}{2}+2-4=3$.

また，$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}=\dfrac{1}{2}\cdot2\cdot1=1$ であるから，求める四面体の体積は

$$\triangle\mathrm{ABC}\times\mathrm{OH}\times\frac{1}{3}=1\times\sqrt{3}\times\frac{1}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$ 答

$\boxed{3}$ ’25 福井大(工) 定積分で表された数列. (1) 平易 (2) 標準 (3) やや難

解答

(1) $\displaystyle\int_0^{\log 2} g(x)dx = \Big[\log|f(x)|\Big]_0^{\log 2} = \log|f(\log 2)| - \log|f(0)|$.

$f(\log 2) = 2 + 2^{-1} = \dfrac{5}{2}$, $f(0) = 1 + 1 = 2$ であるから, $\displaystyle\int_0^{\log 2} g(x)dx = \log\frac{5}{2} - \log 2 = \log\frac{5}{4}$. 答

(2) $g(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ であり, 商の微分法を用いて

$$g'(x) = \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} = 1 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)^2 = 1 - \{g(x)\}^2.$$ 終

(3) (2) より $\{g(x)\}^2 = 1 - g'(x)$ であり, これを用いると

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= \int_0^{\log 2} \{g(x)\}^n \{g(x)\}^2 dx = \int_0^{\log 2} \{g(x)\}^n \{1 - g'(x)\} dx \\ &= \int_0^{\log 2} \{g(x)\}^n dx - \int_0^{\log 2} \{g(x)\}^n g'(x) dx \\ &= I_n - \left[\frac{1}{n+1}\{g(x)\}^{n+1}\right]_0^{\log 2}. \end{aligned}$$

$g(\log 2) = \dfrac{2 - 2^{-1}}{2 + 2^{-1}} = \dfrac{3}{5}$ であるから, $I_{n+2} = I_n - \dfrac{1}{n+1}\left(\dfrac{3}{5}\right)^{n+1}$. 答

また, $n = 1$ として $I_3 = I_1 - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{5}\right)^2$ であり, (1) より $I_3 = \log\dfrac{5}{4} - \dfrac{9}{50}$. 答

$\boxed{4}$ '25 福井大(工) 3次関数の極値に関する確率．(1) 平易 (2) 標準 (3) やや難

解答

a，b，c はそれぞれ 1，2，…，6 のいずれかであり，$(a,\ b,\ c)$ の組は全部で $6^3=216$ 通りある．

$f'(x)=ax^2-2bx+3c$ であり，$f'(x)=0$ の判別式を D とすると，$\dfrac{D}{4}=b^2-3ac$．

(1) $f'(2)=0 \iff 3c=4(b-a)$．…①

3 と 4 は互いに素であり，c は 4 の倍数であり $c=4$．答

このとき，$b-a=3$ であり，① を満たす $(a,\ b,\ c)$ の組は $(a,\ b,\ c)=(1,\ 4,\ 4)$, $(2,\ 5,\ 4)$, $(3,\ 6,\ 4)$ の 3 通りあるから，求める確率は $\dfrac{3}{216}=\dfrac{1}{72}$．答

(2) $f'(3)=0 \iff 3a+c=2b$．…②

$b\leqq 6$ より $3a+c=2b\leqq 12$ であり，$c\geqq 1$ より $a=1,\ 2,\ 3$ に限られる．

(i) $a=1$ のとき，② $\iff 2b=c+3$ であり，$(b,\ c)=(2,\ 1),\ (3,\ 3),\ (4,\ 5)$．

(ii) $a=2$ のとき，② $\iff 2b=c+6$ であり，$(b,\ c)=(4,\ 2),\ (5,\ 4),\ (6,\ 6)$．

(iii) $a=3$ のとき，② $\iff 2b=c+9$ であり，$(b,\ c)=(5,\ 1),\ (6,\ 3)$．

ゆえに，② を満たす $(a,\ b,\ c)$ の組は 8 通りあるから，求める確率は $\dfrac{8}{216}=\dfrac{1}{27}$．答

(3) $f(x)$ が $x=3$ で極値をとるための必要十分条件は

$f'(3)=0$ かつ $D>0 \iff 3a+c=2b$ かつ $b^2>3ac$．…③

② を満たす $(a,\ b,\ c)$ の組 8 通りのうち，③ を満たすのは

$(1,\ 2,\ 1)$, $(1,\ 4,\ 5)$, $(2,\ 4,\ 2)$, $(2,\ 5,\ 4)$, $(3,\ 5,\ 1)$, $(3,\ 6,\ 3)$

の 6 通りあるから，求める条件付き確率は $\dfrac{6}{8}=\dfrac{3}{4}$．答