$\boxed{1}$ ’25 福井大 (医) 複素数平面と方程式の論理．(1) 易 (2) やや難 (3) 難

解答

(1)　$|\alpha|=|\alpha-2|$ より α は 2 点 0，2 を結ぶ線分の垂直二等分線上を動く．ゆえに，α の実部は $\dfrac{0+2}{2}=1$ である．答

(2)　$\alpha^2+\beta^2-2\alpha-2\beta+2=0 \iff (\beta-1)^2=-(\alpha-1)^2$．$\cdots(*)$

(1) より $\alpha=1+pi$ (p は実数) とおけるので，$(\beta-1)^2=p^2$，すなわち $\beta=1\pm p$．

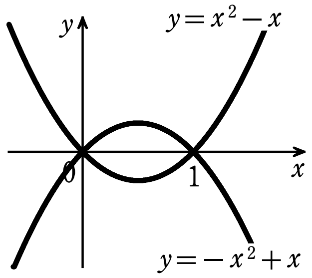
ここで，x，y は実数として $z=\alpha\beta=x+yi$ とおく．

(ｱ)　$\beta=1+p$ のとき，$z=(1+pi)(1+p)=(1+p)+p(1+p)i$．

実部と虚部を比較して，$\begin{cases} x=1+p \\ y=p(1+p) \end{cases}$ であり，$y=x(x-1)$．

(ｲ)　$\beta=1-p$ のとき，$z=(1+pi)(1-p)=(1-p)+p(1-p)i$．

実部と虚部を比較して，$\begin{cases} x=1-p \\ y=p(1-p) \end{cases}$ であり，$y=-x(x-1)$．



答

ゆえに，点 z が描く図形は右図の太線部である．

(3)　$(\alpha,\ \beta)\fallingdotseq(1,\ 1)$ であり，$\arg\dfrac{\beta-1}{\alpha-1}=\dfrac{\pi}{2}$ および $(*)$ より $\beta-1=i(\alpha-1)$．(2) と同様に $\alpha=1+pi$ ($p\fallingdotseq 0$) とおくと，$\beta=1-p$ と表せる．もう一つの解を γ として，解と係数の関係により

$$\alpha\beta+(\alpha+\beta)\gamma=\frac{9}{4}，\cdots①\quad \alpha\beta\gamma=\frac{5}{8}．\cdots②$$

①，② のもとで $\alpha\beta\fallingdotseq 0$，$p\fallingdotseq 0,\ 1$ であり $\gamma=\dfrac{5}{8\alpha\beta}$ $\cdots$③ を ① に代入して，$\alpha\beta+\dfrac{5}{8}\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}\right)=\dfrac{9}{4}$．$\cdots$④

ここで，$\alpha\beta=(1-p)+p(1-p)i$，$\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{1-pi}{1+p^2}+\dfrac{1}{1-p}$ であるから，④ において両辺の実部を比較して

$$(1-p)+\frac{5}{8}\left(\frac{1}{1+p^2}+\frac{1}{1-p}\right)=\frac{9}{4}$$

が成り立つことが必要となる．これを解くと，$(2p-1)(4p^2-2p+3)=0$ より $p=\dfrac{1}{2}$．

逆にこのとき，$\alpha=1+\dfrac{1}{2}i$，$\beta=\dfrac{1}{2}$ であり，③ より $\gamma=\dfrac{5}{2(2+i)}=1-\dfrac{1}{2}i$ となり，これらは ①，② を満たす．

解と係数の関係より $\alpha+\beta+\gamma=-\dfrac{k}{8}$ であり，$k=-8(\alpha+\beta+\gamma)=-20$．$(\alpha,\ \beta)=\left(1+\dfrac{1}{2}i,\ \dfrac{1}{2}\right)$．答

注意 k は実数であるとは限らない．

$\boxed{2}$ '25 福井大(医) 定積分で表された数列. (1) 易 (2) 平易 (3) 標準

解答

(1) 商の微分法により, $f'(x)=\dfrac{(e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2}=1-\left(\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right)^2=1-\{f(x)\}^2$. 終

(2) (1) より $\{f(x)\}^2=1-f'(x)$ であるから,

$$I_2=\int_0^{\log 2}\{1-f'(x)\}dx=\Big[x-f(x)\Big]_0^{\log 2}=\log 2-f(\log 2)+f(0)=\log 2-\frac{3}{5}.$$ 答

(3) (2) と同様にして,

$$I_{n+2}=\int_0^{\log 2}\{f(x)\}^n\{1-f'(x)\}dx=\int_0^{\log 2}\{f(x)\}^n dx-\int_0^{\log 2}\{f(x)\}^n f'(x)dx$$

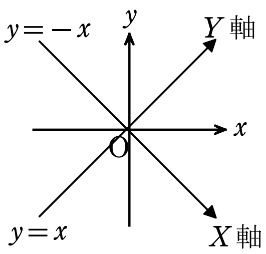
$$=I_n-\left[\frac{1}{n+1}\{f(x)\}^{n+1}\right]_0^{\log 2}=I_n-\frac{1}{n+1}\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}.$$ 答

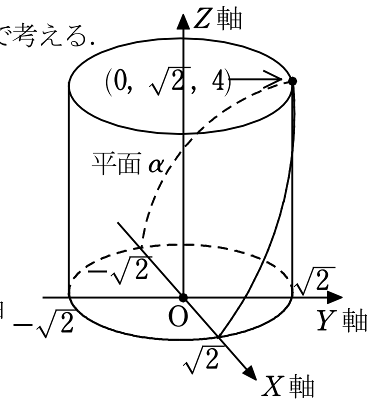
さらに, $I_4=I_2-\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{3}{5}\right)^3=\left(\log 2-\dfrac{3}{5}\right)-\dfrac{9}{125}=\log 2-\dfrac{84}{125}$. 答

3 '25 福井大(医) 空間図形に関する求積問題. (1) 平易 (2) やや難 (3) 難

解答

xy 平面において，図のように X 軸，Y 軸をとり，原点を O とする XYZ 座標空間で考える．





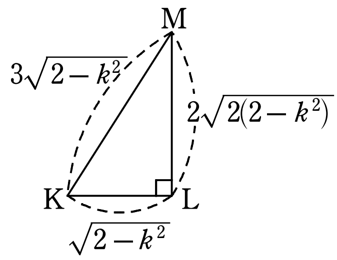
平面 α は X 軸を含み，点 $(0,\ \sqrt{2},\ 4)$ を通るので，

$$\alpha : Z=2\sqrt{2}\,Y$$

と表せる．

(1)　平面 $X=k$ $(|k|\leqq\sqrt{2})$ による A の切り口は，$\mathrm{K}(k,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{L}(k,\ \sqrt{2-k^2},\ 0)$，$\mathrm{M}(k,\ \sqrt{2-k^2},\ 2\sqrt{2(2-k^2)})$ として直角三角形 KLM であり，その面積は $\sqrt{2}(2-k^2)$ と表せる．

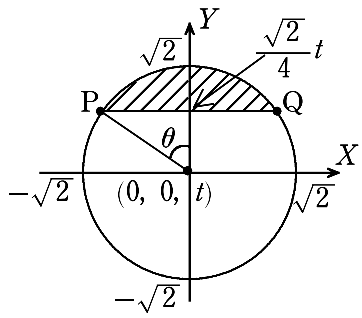
　ゆえに，A の体積は $\displaystyle\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\sqrt{2}(2-k^2)dk=2\sqrt{2}\left[2k-\frac{1}{3}k^3\right]_0^{\sqrt{2}}=\frac{16}{3}$ ．答



(2)　α による切り口の面積を S として，$\displaystyle S=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\mathrm{KM}\,dk=3\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\sqrt{2-k^2}\,dk$ ．

$\displaystyle\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\sqrt{2-k^2}\,dk$ は半径 $\sqrt{2}$ の半円の面積であり，$S=3\cdot\dfrac{1}{2}\pi(\sqrt{2})^2=3\pi$．答

(3)　$0\leqq t\leqq 4$ として，平面 $Z=t$ における立体 A の切り口は，円 $X^2+Y^2=2$ を直線 $Y=\dfrac{\sqrt{2}}{4}t$ で2つの部分に分けるとき，小さい方の図形(斜線部)である．



　さらに，右図のように交点 P, Q および角 θ をとると，$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ であり，

$\cos\theta=\dfrac{1}{4}t$，

t	$0\to 4$
θ	$\frac{\pi}{2}\to 0$

$\dfrac{dt}{d\theta}=-4\sin\theta$．また，半径 $r=\sqrt{2}$ とする．

　A の表面のうち，直円柱の側面部分の面積を T とおくと，

$$T=\int_0^4\overparen{\mathrm{PQ}}dt=\int_0^4 2r\theta\,dt=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}2\sqrt{2}\,\theta\cdot(-4\sin\theta)d\theta=8\sqrt{2}\Big[\theta\cdot(-\cos\theta)+\sin\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=8\sqrt{2}.$$

　ゆえに，A の表面積は，$S+T+\dfrac{1}{2}\pi r^2=4\pi+8\sqrt{2}$．答

★　A の底面は半径 $\sqrt{2}$ の半円であり，平面 α による切り口の XY 平面への正射影となります．この面積を S' とすると，$S'=\dfrac{1}{3}S$ が成り立つので，(2) では $S=3S'=3\pi$ として求めることができます．

$\boxed{4}$ '25 福井大(医) 3次関数の極値に関する確率．(1) 平易 (2) 標準 (3) やや難

解答

a，b，c はそれぞれ 1，2，$\cdots$，6 のいずれかであり，(a, b, c) の組は全部で $6^3=216$ 通りある．

$f'(x)=ax^2-2bx+3c$ であり，$f'(x)=0$ の判別式を D とすると，$\dfrac{D}{4}=b^2-3ac$．

(1)　$f'(2)=0 \iff 3c=4(b-a)$．…①

　3 と 4 は互いに素であり，c は 4 の倍数であり $c=4$．このとき，$b-a=3$ であり，① を満たす(a, b, c) の組は

$(a, b, c)=(1, 4, 4), (2, 5, 4), (3, 6, 4)$ の 3 通りあるから，求める確率は $\dfrac{3}{216}=\dfrac{1}{72}$． 答

(2)　$f(x)$ が $x=3$ で極値をとるための必要十分条件は

$$f'(3)=0 \text{ かつ } D>0 \iff 3a+c=2b \text{ かつ } b^2>3ac．\cdots②$$

$b \leqq 6$ より $3a+c=2b \leqq 12$ であり，$c \geqq 1$ より $a=1, 2, 3$ に限られる．

(ⅰ) $a=1$ のとき，② $\iff 2b=c+3$ かつ $b^2>3c$ であり，(b, c) の組は$(b, c)=(2, 1), (4, 5)$．

(ⅱ) $a=2$ のとき，② $\iff 2b=c+6$ かつ $b^2>6c$ であり，(b, c) の組は$(b, c)=(4, 2), (5, 4)$．

(ⅲ) $a=3$ のとき，② $\iff 2b=c+9$ かつ $b^2>9c$ であり，(b, c) の組は$(b, c)=(5, 1), (6, 3)$．

ゆえに，② を満たす (a, b, c) の組は 6 通りあるから，求める確率は $\dfrac{6}{216}=\dfrac{1}{36}$． 答

(3)　$f(x)$ が極値をとる関数であるための必要十分条件は，$D>0$ より $b^2>3ac$．…③

$b \leqq 6$ より $3ac<b^2 \leqq 36$ であり，$ac<12$ より $ac=1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10$ に限られて，(a, b, c) の組は

(ア) $ac=1$ のとき，③ $\iff b^2>3$，$(a, c)=(1, 1)$，$b=2, 3, 4, 5, 6$ より 5 通り．

(イ) $ac=2$ のとき，③ $\iff b^2>6$，$(a, c)=(1, 2), (2, 1)$，$b=3, 4, 5, 6$ より $2\times4=8$ 通り．

(ウ) $ac=3$ のとき，③ $\iff b^2>9$，$(a, c)=(1, 3), (3, 1)$，$b=4, 5, 6$ より $2\times3=6$ 通り．

(エ) $ac=4$ のとき，③ $\iff b^2>12$，$(a, c)=(1, 4), (2, 2), (4, 1)$，$b=4, 5, 6$ より $3\times3=9$ 通り．

(オ) $ac=5$ のとき，③ $\iff b^2>15$，$(a, c)=(1, 5), (5, 1)$，$b=4, 5, 6$ より $2\times3=6$ 通り．

(カ) $ac=6$ のとき，③ $\iff b^2>18$，$(a, c)=(1, 6), (2, 3), (3, 2), (6, 1)$，$b=5, 6$ より $4\times2=8$ 通り．

(キ) $ac=8$ のとき，③ $\iff b^2>24$，$(a, c)=(2, 4), (4, 2)$，$b=5, 6$ より $2\times2=4$ 通り．

(ク) $ac=9$ のとき，③ $\iff b^2>27$，$(a, b, c)=(3, 6, 3)$ の 1 通り．

(ケ) $ac=10$ のとき，③ $\iff b^2>30$，$(a, b, c)=(2, 6, 5), (5, 6, 2)$ の 2 通り．

これらと (2) より，求める条件付き確率は $\dfrac{6}{5+8+6+9+6+8+4+1+2}=\dfrac{6}{49}$． 答