$\boxed{1}$ ’26 福井大 (工)　平面ベクトル，極限．(1) 易 (2) 易 (3) やや易

解答

(1)　$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{2}$ より $|\vec{b}-\vec{a}|=\sqrt{2}$．両辺を 2 乗して，

$$|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{a}|^2=2.$$

$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$ を代入すると，

$$4-2\vec{a}\cdot\vec{b}+1=2,\ \text{すなわち}\ \vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{3}{2}.$$ 答

(2)
$$\begin{aligned}|(1-t)\vec{a}+t\vec{b}|^2&=(1-t)^2|\vec{a}|^2+2t(1-t)\vec{a}\cdot\vec{b}+t^2|\vec{b}|^2\\&=(1-t)^2+3t(1-t)+4t^2\\&=2t^2+t+1\\&=2\left(t+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{8}.\end{aligned}$$

ゆえに，$t=-\dfrac{1}{4}$ のときに最小値 $\sqrt{\dfrac{7}{8}}=\dfrac{\sqrt{14}}{4}$ をとる．答

(3)
$$\begin{aligned}|(1-t)\vec{a}+t\vec{b}|-t|\vec{a}-\vec{b}|&=\sqrt{2t^2+t+1}-\sqrt{2}\,t\\&=\frac{t+1}{\sqrt{2t^2+t+1}+\sqrt{2}\,t}.\end{aligned}$$

分子と分母を t で割ることにより，

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\left\{|(1-t)\vec{a}+t\vec{b}|-t|\vec{a}-\vec{b}|\right\}&=\lim_{t\to\infty}\frac{1+\dfrac{1}{t}}{\sqrt{2+\dfrac{1}{t}+\dfrac{1}{t^2}}+\sqrt{2}}\\&=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$ 答

$\boxed{2}$ ’26 福井大 (工)　反復試行の確率．(1) 易 (2) 易 (3) やや易

解答

(1)　1 個のさいころを 1 回投げるとき，偶数の目が出る確率は $\dfrac{1}{2}$，奇数の目が出る確率も $\dfrac{1}{2}$ である．

ゆえに，3 回投げるとき，偶数の目がちょうど 1 回 (奇数の目がちょうど 2 回) 出る確率は，

$${}_3\mathrm{C}_1\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}.$$ 答

(2)　X が偶数となるのは，3 回のうち

正の向きに偶数の目の数だけ進める回数を a，負の向きに奇数の目の数だけ進める回数を b と定めると，$(a,\ b)=(1,\ 2),\ (3,\ 0)$ のときである．

（i）$(a,\ b)=(1,\ 2)$ となる確率は，(1) より $\dfrac{3}{8}$.　（ii）$(a,\ b)=(3,\ 0)$ となる確率は，$\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{1}{8}$.

以上により，X が偶数である確率は，$\dfrac{3}{8}+\dfrac{1}{8}=\dfrac{1}{2}$. 答

(3)　事象 $A,\ B$ を，

A : X が偶数である　B : $X=0$ である

と定めると，求める条件付き確率は $P_A(B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$ …①　である．(2) より $P(A)=\dfrac{1}{2}$.

ここで，$A\cap B$ が起こるには，(2) の $(a,\ b)=(1,\ 2)$ となることが必要であり，ただ一つの偶数の目について場合分けすると，3 個の目の集合は

(ア) 偶数の目が 2 のとき，$\{1,\ 1,\ 2\}$ であり，目の出方を考えて $\dfrac{3!}{2!}=3$ 通り．

(イ) 偶数の目が 4 のとき，$\{1,\ 3,\ 4\}$ であり，目の出方を考えて $3!=6$ 通り．

(ウ) 偶数の目が 6 のとき，$\{1,\ 5,\ 6\},\ \{3,\ 3,\ 6\}$ であり，目の出方を考えて $3!+\dfrac{3!}{2!}=9$ 通り．

以上により，$P(A\cap B)=\dfrac{3+6+9}{6^3}=\dfrac{1}{12}$. ① から $P_A(B)=\dfrac{1}{12}\div\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{6}$. 答

$\boxed{3}$ '26 福井大 (工)　積分法．(1) やや易 (2) 標準 (3) 標準

解答

(1)　$\dfrac{1}{1-x^2}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{1-x}\right)$ と表せて，C を積分定数として

$$\int\frac{dx}{1-x^2}=\frac{1}{2}(\log|1+x|-\log|1-x|)+C$$

$$=\frac{1}{2}\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C.$$ 答

(2)　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{d\theta}{\cos\theta}=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos\theta}{\cos^2\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos\theta}{1-\sin^2\theta}d\theta.$

ここで，$\sin\theta=x\ \left(-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，

θ	$0\to\pi/6$
x	$0\to1/2$

，$\cos\theta\cdot\dfrac{d\theta}{dx}=1$ であり，

これらと (1) により

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{d\theta}{\cos\theta}=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{1-\sin^2\theta}\cdot\cos\theta\cdot\frac{d\theta}{dx}\cdot dx\right)=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{1-x^2}=\left[\frac{1}{2}\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\log 3.$$ 答

(3)　$x=3\tan\theta\ \left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，

x	$0\to\sqrt{3}$
θ	$0\to\pi/6$

，$\dfrac{dx}{d\theta}=\dfrac{3}{\cos^2\theta}$ であり，

これらと (2) により

$$\int_0^{\sqrt{3}}\frac{dx}{\sqrt{x^2+9}}=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{3\sqrt{\tan^2\theta+1}}\cdot\frac{dx}{d\theta}\cdot d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{d\theta}{\cos\theta}=\frac{1}{2}\log 3\ .$$ 答

$\boxed{4}$ '26 福井大(工)　漸化式と数列の極限．(1) 易 (2) やや難 (3) やや易

解答

(1)　$a_{n+1}-2=\dfrac{3}{4}(a_n-2)$ と表せて，

数列 $\{a_n-2\}$ は初項 $a_1-2=4-2=2$，公比 $\dfrac{3}{4}$ の等比数列

である．ゆえに，$a_n-2=2\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-1}$，すなわち $a_n=2\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-1}+2$．答

(2)　$a_n \geqq b_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$　………(*)　が成り立つことを，数学的帰納法を用いて示す．

[1]　$n=1$ のとき，$a_1=b_1=4$ より (*) 成立．

[2]　$n=k$ のとき，(*) 成立と仮定すると，$a_k \geqq b_k$．…①

与えられた漸化式を用いると，$a_{k+1}-b_{k+1}=\left(\dfrac{3}{4}a_k+\dfrac{1}{2}\right)-\dfrac{2b_k{}^2}{3b_k-2}$．

ここで，① および $b_k \geqq 2$ を用いると，

$$\begin{aligned}a_{k+1}-b_{k+1}&=\frac{3}{4}(a_k-b_k)+\frac{3}{4}b_k+\frac{1}{2}-\frac{2b_k{}^2}{3b_k-2}\\&=\frac{3}{4}(a_k-b_k)+\frac{b_k{}^2-4}{4(3b_k-2)}\geqq 0.\end{aligned}$$

ゆえに，$n=k+1$ のときも (*) 成立．

以上 [1]，[2] により，すべての自然数 n について，(*) すなわち $a_n \geqq b_n$ が成り立つ．終

(3)　(2) および $b_n \geqq 2$ より $2 \leqq b_n \leqq a_n$．…②

(1) より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}+2\right\}=2$ である．

ゆえに，② においてはさみうちの原理より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=2$．答