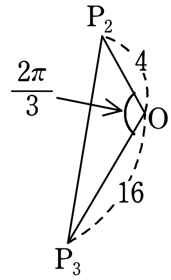
$\boxed{1}$ '26 福井大(医)　複素数平面，確率．(1) 易 (2) やや易 (3) 標準

解答

複素数 z_n を表す点を P_n とする．



(1)　$z_1=2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$ と表せて，ド・モアブルの定理を用いると，

$$z_2={z_1}^2=4\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right),\quad z_3={z_2}^2=16\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right).$$

ゆえに，$\triangle OP_2P_3$ の面積は $\dfrac{1}{2}\cdot OP_2\cdot OP_3\cdot\sin\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{1}{2}\cdot 4\cdot 16\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=16\sqrt{3}$．答

(2)　$a_1=|z_1|=2$ であり，$|z_{n+1}|=|z_n|^2$ より $a_{n+1}={a_n}^2$．

帰納的に $a_n>0$ であり，両辺の対数(底は 2 である)をとると，$\log_2 a_{n+1}=2\log_2 a_n$．

数列 $\{\log_2 a_n\}$ は初項 $\log_2 a_1=1$，公比 2 の等比数列となり，$\log_2 a_n=2^{n-1}$，すなわち $a_n=2^{2^{n-1}}$．答

(3)　z_n の偏角を θ_n $(0\leqq\theta_n<2\pi)$ とする．$\theta_1=\dfrac{\pi}{3}$，$\theta_{n+1}=\begin{cases}2\theta_n, & (0\leqq\theta_n<\pi)\\ 2(\theta_n-\pi) & (\pi\leqq\theta_n<2\pi)\end{cases}$ であるから，

$$\theta_2=\frac{2\pi}{3},\ \theta_3=\frac{4\pi}{3},\ \theta_4=\frac{2\pi}{3},\ \theta_5=\frac{4\pi}{3},\ \cdots,\ \theta_{19}=\frac{4\pi}{3},\ \theta_{20}=\frac{2\pi}{3}.$$

ここで，直線 OP_1 を l_1，直線 OP_2 を l_2 と定めると，相異なる 20 個の点 P_1，P_2，…，P_{20} について，点 P_{2m-1} $(m=1, 2, \cdots, 10)$ は l_1 上に，点 P_{2m} $(m=1, 2, \cdots, 10)$ は l_2 上に並ぶ．$l_1 \not\parallel l_2$ に留意すると，選んだ 3 点が同一直線上に並ぶのは，次の 2 つの場合に限られる．

- l_1 上の 10 個の点 P_{2m-1} $(m=1, 2, \cdots, 10)$ から 3 個選ぶ．
- l_2 上の 10 個の点 P_{2m} $(m=1, 2, \cdots, 10)$ から 3 個選ぶ．

ゆえに，求める確率は $\dfrac{{}_{10}C_3+{}_{10}C_3}{{}_{20}C_3}=\dfrac{4}{19}$．答

$\boxed{2}$ '26 福井大 (医)　積分法．(1) 易 (2) やや易 (3) やや易

解答

(1) $\dfrac{1}{1-x^2}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{1-x}\right)$ と表せて，C を積分定数として

$$\int\frac{dx}{1-x^2}=\frac{1}{2}(\log|1+x|-\log|1-x|)+C$$

$$=\frac{1}{2}\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C．$$ 答

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{d\theta}{\cos\theta}=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos\theta}{\cos^2\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos\theta}{1-\sin^2\theta}d\theta.$

$\sin\theta=x\ \left(-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，

θ	$0\to\pi/6$
x	$0\to 1/2$

，$\cos\theta\cdot\dfrac{d\theta}{dx}=1$ であり，これらと (1) により

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{d\theta}{\cos\theta}=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{1-\sin^2\theta}\cdot\cos\theta\cdot\frac{d\theta}{dx}\cdot dx\right)=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{1-x^2}=\left[\frac{1}{2}\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\log 3．$$ 答

(3) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+9}}$ は偶関数であるから，$\displaystyle\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\frac{dx}{\sqrt{x^2+9}}=2\int_0^{\sqrt{3}}\frac{dx}{\sqrt{x^2+9}}$ ．

$x=3\tan\theta\ \left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，

x	$0\to\sqrt{3}$
θ	$0\to\pi/6$

，$\dfrac{dx}{d\theta}=\dfrac{3}{\cos^2\theta}$ であり，これらと (2) により

$$\int_0^{\sqrt{3}}\frac{dx}{\sqrt{x^2+9}}=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{3\sqrt{\tan^2\theta+1}}\cdot\frac{dx}{d\theta}\cdot d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{d\theta}{\cos\theta}=\frac{1}{2}\log 3\ .$$

ゆえに，$\displaystyle\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\frac{dx}{\sqrt{x^2+9}}=\log 3$ ．答

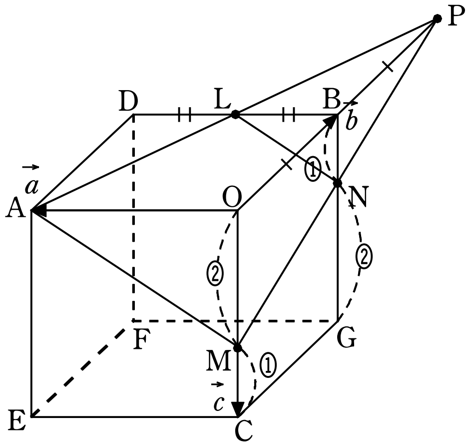
$\boxed{3}$ ’26 福井大 (医)　空間ベクトル．(1) 易 (2) やや易 (3) やや易

$\boxed{\text{解答}}$

(1)　右図のように，△PBN∽△POM，△PBL∽△POA であり，相似比はともに $1:2$ である．…(*)

　L は辺 BD の中点，P は辺 OB の $2:1$ 外分点となるから．

$$\overrightarrow{\mathrm{OL}}=\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b},\ \overrightarrow{\mathrm{OP}}=2\vec{b}.$$ 答



(2)　$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=0$．$\alpha$ 上の点 H について，

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{AM}}+t\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ (s，t は実数) と表せることから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(1-s-t)\vec{a}+2t\vec{b}+\frac{2s}{3}\vec{c}.\ \cdots①$$

まず，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ より $\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AM}}=0$ であり，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\left(\frac{2}{3}\vec{c}-\vec{a}\right)=0 \iff \frac{4s}{9}-(1-s-t)=0 \iff t=1-\frac{13}{9}s.$$

次に，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ より $\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$ であり，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot(2\vec{b}-\vec{a})=0 \iff 4t-(1-s-t)=0 \iff s+5t=1.$

これらを解いて，$s=\dfrac{9}{14}$，$t=\dfrac{1}{14}$．① に代入して $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{2}{7}\vec{a}+\dfrac{1}{7}\vec{b}+\dfrac{3}{7}\vec{c}$. 答

また，$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|^2=\left(\dfrac{2}{7}\right)^2+\left(\dfrac{1}{7}\right)^2+\left(\dfrac{3}{7}\right)^2=\dfrac{14}{49}$ であり，$\mathrm{OH}=\dfrac{\sqrt{14}}{7}$. 答

(3)　(*) より四面体 PBLN と四面体 POAM は相似であり，相似比が $1:2$ より体積比は $1^3:2^3=1:8$ である．

四面体 POAM の体積を V とおくと，$V=\dfrac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{OAM}\cdot\mathrm{OP}$ より $V=\dfrac{1}{3}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\cdot1\cdot\dfrac{2}{3}\right)\cdot2=\dfrac{2}{9}$.

ゆえに，求める体積は $V-\dfrac{1}{8}V=\dfrac{7}{8}V=\dfrac{7}{36}$. 答

$\boxed{4}$ ’26 福井大(医)　標本平均，推定，仮説検定．(1) 標準 (2) やや易 (3) 標準

解答

ある薬１包の重さの測定値を X(g)，毎回の測定誤差を Y(g) とおく．

Y は正規分布 $N(0,\ 0.5^2)$ に従うので，$E(Y)=0$，$\sigma(Y)=0.5$．

また，この薬１包の真の重さ a(g) であるから，測定誤差＝測定値－真の値 により

$Y=X-a$，すなわち $X=Y+a$ が成り立つ．

(1)　$E(X)=E(Y+a)=E(Y)+a=a$，$\sigma(X)=\sigma(Y+a)=\sigma(Y)=0.5$ であるから，X は正規分布 $N(a,\ 0.5^2)$ に従う．

ゆえに，100 回測った重さの標本平均 $\overline{X}$ は正規分布 $N\left(a,\ \dfrac{0.5^2}{100}\right)$ に従うから，

$$E(\overline{X})=a,\ \sigma(\overline{X})=\frac{0.5}{10}=0.05.$$ 答

(2)　標本の大きさ $n=100$，標本平均 $\overline{X}=50.2$ と定めると，母平均 a に対する信頼度 95 % の信頼区間は

$$\left[\overline{X}-1.96\cdot\frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}},\ \overline{X}+1.96\cdot\frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}\right]$$

である．$1.96\cdot\dfrac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}=1.96\cdot0.05=0.098$ より $\overline{X}-0.098=50.102\fallingdotseq50.10$，$\overline{X}+0.098=50.298\fallingdotseq50.30$．

ゆえに，求める信頼区間は $[50.10,\ 50.30]$．答

(3)　「仮説 H_0：母平均 a について $a=50$ である」を立てる．標本の大きさは十分に大きいと考えると，

仮説 H_0 が正しいとするとき，$\overline{X}$ は近似的に正規分布 $N\left(50,\ \dfrac{0.5^2}{100}\right)$ に従う．$Z=\dfrac{\overline{X}-50}{0.05}$ とおくと，Z は近似的に

$N(0,\ 1)$ に従う．正規分布表より $P(Z\leqq1.64)\fallingdotseq0.95$ であるから，有意水準 5 % の棄却域は $Z\geqq1.64$．…①

$\overline{X}=50.2$ のとき，$Z=\dfrac{50.2-50}{0.05}=4$ であり，この値は棄却域 ① に入るから，仮説 H_0 を棄却できる．

すなわち，真の重さ a は 50 g より大きいといえる．答